Pihenő

Szalay István

Forradalmak a matematikában?!

A változások korát éljük, néha már vágyunk egy kis stabilitásra. A minap egy társaságban így fakadt ki bölcsész barátom: – *Milyen jó nektek matematikusoknak! A 2x2 mindig 4!*

Gyorsan papírt vetettem a kezébe és diktáltam: Legyen a, b és c három olyan szám, amelyekre a+b=c. Szorozd meg mindkét oldalt 4-gyel, ekkor 4a+4b= 4c. Szorozd meg öttel is mindkét oldalt, írd az előbbi alá, de fordítsd meg az egyenlőség jobb- és baloldalát, majd add össze őket:

$$\left.\begin{array}{r} 4a+4b=4c \\ 5a+5b=5c \end{array}\right\} +$$

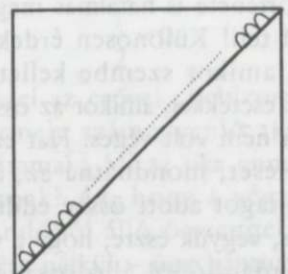
$$4a+4b+5c=5a+5b+4c$$

Vonj ki mindkét oldalból 9 c-t, ekkor adódik

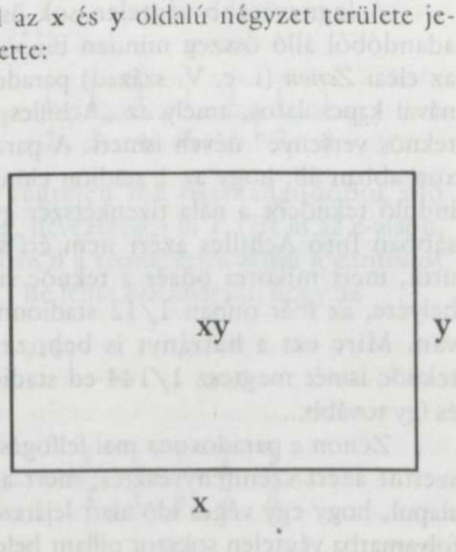
$$4a+4b-4c=5a+5b-5c$$

Emeld ki baloldalon a 4-est, jobboldalon az 5-öst, ekkor 4(a+b-c)=5(a+b-c), majd egyszerűsíts az (a+b-c) tényezővel! A 4=5 egyenlőséget igen vonakodva írta le... (Az olvasóra bízom, védje meg a matematikát a hamis prófétáktól.)

Jó – mondhatná valaki – megtaláltam a hibát, ezzel nem lehet becsapni, ez nem egy forradalmi jelenség, csak szemfényvesztés, a matematika nyílegyenes, egzakt vonulatát ezzel nem lehet feltartóztatni. Mennyire nem így van! A matematikában is az új ismeretnek ki kellett szorítania a régihez tapadt hiedelmeket, mondhatni dogmákat. A mai művelt ember már tudja, hogy nincs olyan – akármilyen icipici – hosszúságegység, amelyet bizonyos egész számszor (mondjuk 1 000-szer) rámérve egy négyzet oldalára van olyan másik egész szám (mondjuk 1 400), hogy az icipici egység ennyiszerese ugyanannak a négyzetnek az átlóját mérje le.



Igen, akármilyen picike egységgel próbálkozunk, nem sikerül. A matematika ezt a traumát már az ókorban (i. e. VI. század) a $\sqrt{2}$ „felfedezése" idején felismerte, és sok vajúdás után megszületett az irracionális szám fogalma. Létrejött a geometriai algebra, azaz nem a szakaszt jellemezték számmal, hanem maga a szakasz jelentette a számot, az x és y számok szorzatát, például az x és y oldalú négyzet területe jelentette:



A geometriai algebra természetes korlátokba ütközött a háromtényezős szorzatnál (ezt még kifejezte a téglatest térfogata), de utána már a negyedik dimenzió jött volna, amit nem tudtak elképzelni. (Ma sem látjuk „szemmel" a negyedik dimenziót, de nagy biztonsággal számolunk benne.)

De térjünk vissza az egyszerűbb alapművelethez, az összeadáshoz, mert annak a története is hatalmas megrázkódtatásokkal teli! Különösen érdekes ezek közül az, amikor szembe kellett nézni azokkal az esetekkel, amikor az összeadandók száma nem volt véges. Hát ez igazán erőltetett eset, mondhatná az, aki csak véges sok tagot adott össze eddigi élete során. Nos, vegyük észre, hogy a végtelen sok összeadandóból álló összeg már a legegyszerűbb távolságméréskor előjöhet. Kíváncsi vagyok az asztal hosszúságára; ráteszem a méterrudat, ráfér mondjuk egyszer és még marad ki; hasonló eset történik a milliméterrel és így tovább, inkább az lenne a meglepő, ha véget érne ez az eljárás. Így az asztal hossza nem más, mint az egyes lépésekben mért hosszúságok összege, azaz egy végtelen sok összeadandóból álló összeggel van dolgunk.

A legnevesebb végtelen sok összeadandóból álló összeg minden bizonnyal az eleai *Zenon* (i. e. V. század) paradoxonával kapcsolatos, amely az „Achilles és a teknős versenye" néven ismert. A paradoxon abban áll, hogy az 1 stadion előnnyel induló teknőcöt a nála tizenkétszer gyorsabban futó Achilles azért nem éri soha utól, mert mikorra odaér a teknőc starthelyére, az már onnan 1/12 stadionnyira van. Mire ezt a hátrányt is behozza, a teknőc ismét megtesz 1/144-ed stadiont, és így tovább...

Zenon e paradoxona mai felfogásunk szerint azért szemfényvesztés, mert azon alapul, hogy egy véges idő alatt lejátszódó folyamatba végtelen sokszor pillant bele, és emiatt tűnik úgy, hogy a folyamat soha sem ér véget. Ha lejegyezzük az Achilles által egyes megfigyelési pontok között megtett utat, akkor az alábbi, végtelen sok összeadandóból álló összeget látjuk:

$$1+\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\ldots+\frac{1}{12^n}+\ldots$$

Az első n tagot a mértani sorozat összegképletével számolva, zárt alakba írhatjuk

$$A_n=\frac{\left(\frac{1}{12}\right)^n-1}{\frac{1}{12}-1}=\frac{12}{11}\left(1-\left(\frac{1}{12}\right)^n\right),$$

innen

$$n\xrightarrow{\lim}\infty\quad A_n=\frac{12}{11}$$

A teknőc útja

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{12^2}+\frac{1}{12^3}+\ldots+\frac{1}{12^n}+\ldots,$$

ahol

$$T_n=\frac{1}{12}\frac{\left(\frac{1}{12}\right)^n-1}{\frac{1}{12}-1}=\frac{1}{11}\left(1-\left(\frac{1}{12}\right)^n\right),$$

innen

$$n\xrightarrow{\lim}\infty T_n=\frac{1}{11}$$

A két összeg különbsége $\frac{12}{11}-\frac{1}{11}=1$, 1 stadion, ami Achilles hátránya volt.

Az előző „lim” pontos fogalma *Cauchy* munkássága során a XIX. század első harmadában született meg. (Közel két és fél évezreddel Zenon után.) És addig? Bizony komoly nehézségek merültek fel, mert igen könnyű volt tévedni még *Leibniz* (1646-1716) életében is. Figyeljük meg az alábbi „lassított” osztást:

$$1024:4=256$$
$$\underline{-8}$$
$$22$$
$$\underline{-20}$$
$$24$$
$$\underline{-24}$$
$$0$$

Csináljuk meg ennek mintájára az 1:(1-x) osztást is!

$$1:(1-x)=1+x+x^2+x^3+\ldots$$
$$\underline{-(1-x)}$$
$$x$$
$$\underline{-(x-x^2)}$$
$$x^2$$
$$\underline{-(x^2-x^3)}$$
$$x^3$$
$$\vdots$$

Senkinek sem okozott zavart az így adódó

(*)

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots$$

képlet, csupán annyit kellett kikötni, hogy $x \neq 0$ (hiszen 0-val osztani nem lehet, lásd a bevezető példát). Vegyük észre, hogy képletünk $x=1/12$ esetben visszaadja Achilles útját a teknőc eléréséig. Írjunk most a képletünkbe $x=-1$-et, ekkor

$$\frac{1}{2}=1-1+1-1+\ldots$$

adódik. Páronként zárójelezve a jobboldalt

$$\frac{1}{2}=(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+\ldots$$

adódik, amiből jön a döbbenet:

$$\frac{1}{2}=0$$

(Ezzel az erővel „bebizonyítható”, hogy bármely számegyenlő akármelyik másik számmal.) Mi az oka ennek az abszurditásnak? Az, hogy a végtelen sok összeadandóból álló összeggel – annak értelmezése nélkül – úgy bántunk, ahogy megszoktuk a véges sok összeadandójú összegeknél: szabadon zárójeleztük az összeadandókat. Cauchy tisztítótüze rávilágított arra, hogy a (*) képlet csak $-1<x<1$ esetén igaz, $x=-1$ már nem írható be!

Maradt azonban „meghökkentő mese” a Cauchy-utáni időkre is. Éppen Leibniz munkássága nyomán bizonyítható, hogy létezik az

(**)

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots$$

végtelen sok összeadandóból álló összeg, nevezetesen ln 2. (Itt ln az e-alapú, más szóval a természetes alapú logaritmust jelöli.) Be lehet bizonyítani, hogy az

(***)

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\ldots$$

összeg, amely **ugyanazokból** az összeadandókból áll, mint az előbbi (**), értéke 3 ln 2.

Játsszunk el az alábbi gondolattal. Tegyük fel, hogy egy újabb Marshall-segély ln 2 milliárd dollárt (kb. 693 millió dollár) akar nekünk juttatni úgy, hogy a (**)-nak megfelelően ad 1 milliárdot, amiből mi egy idő után visszaadunk fél milliárdot, akkor újra ad 1/3 milliárdot, mi pedig visszaadunk 1/4 milliárdot és így tovább. Nemzeti Bankunk ügyes vezetői egy kis átcsoportosítást kérnek: adják előbb az 1 milliárdot és az 1/3 milliárdot mi kicsit késleltetve, de visszaadjuk a félmilliárdot, majd adják az 1/5 és 1/7 milliárdokat, mi visszaadjuk az 1/8 milliárdot és így tovább, hiszen ugyanazok az átutalások forognak. Mire a külföld észbekap, közel 2079 millió dollárhoz jutunk. A baj csak az, hogy a (***) említett titkát ők is ismerik. Tudják, hogy **ha egy végtelen sok tagú összegben az összeadandókat felcseréljük, az összeg értéke megváltozhat**! Kérdés a matematikához: Mikor nem következik be ez az anomália? Nem élek vissza az olvasó türelmével, erre már nem felelek. Remélem, hogy az összeadás egyszerű példáján igazoltam: a matematika egy örök, mozgásban lévő tudomány, ugyanolyan drámai katarzisokkal, mint amilyenekkel hétköznapi életünkben – sokszor nem örömünkre – találkozunk.

Galgóczi László

Káromkodó eleink

Általánosan elterjedt nézet Európában, hogy a trágár beszéd területén világelsők vagyunk: egyetlen nyelv sem olyan gazdag a káromkodások különböző formáiban, mint a magyar. S e nézetben van is valami igazság, hisz egyik nyelvemlékünk is káromkodás: „Hungari autem funesto gladio super eorum capita euibrato amputabant eis manus et caput dicentes Wezteg kwrvanewfya zaros Nemet iwttatok werenkewth ma yzzywk thy wertheketh" (OKLSz. kurva a.).

Mióta és miért káromkodik a magyar? Sokan próbálták már erre válaszolni, MAKOLDY Sándor szerint a káromkodás hazai elterjedését a rácoknak köszönhetjük, bár megjegyzi, hogy az ősi formákat már magunkkal hozhattuk a Kárpát-medencébe. GYÖRFFY István a káromkodás hajdúbeszéd szinonimájából kiindulva a katonáskodásban látja a durva beszéd elterjedését, s szerinte is a rácok a baj okozói. Azt hiszem, a választ ZLINSZKY Aladár fogalmazta meg a legpontosabban, szerinte a káromkodás nem más, mint bálványtörés: az indulatok, a dühkitörések a „korlátok" ellen irányultak, s tabunak tekintendő dolgok önkéntelen emlegetésében nyilvánultak meg. Véleményét támogatják a régi káromkodási pörök jegyzőkönyvei is: 1563: „És minthogy a közelebb múlt években borzasztó szokásba jött az Istennek és Szenteinek átkozódó szidalmazása és káromlása... elrendeltetik, hogy azok, kik a teremtő Istent, keresztséget és lelket szidalmazzák, vagy más módon káromolják, feladatván, illetékes bíróik által első ízben megvesszőztessenek, másod ízben megpálcáztassanak, harmad ízben pedig, mint embör ölők vagy más gonosztevők, halállal büntetessenek" (KOVACS János: Szeged és népe 333); 1589.: „Kgmek... Weottek ezekbe(n) az rut Izoniw zitkoknak elaradasat, feokeppen az lelkewel